BÀI GIẢNG TOÁN CAO CẤP (HIGHER MATHEMATICS)

PHẦN I: ĐẠI SỐ TUYẾN TÍNH VÀ QUY HOẠCH TUYẾN TÍNH (LINEAR ALGEBRAS AND LINEAR PROGRAMMING)

CHƯƠNG II. KHÔNG GIAN R^n VÀ SƠ LƯỢC VỀ KHÔNG GIAN VECTƠ (VECTOR SPACES or LINEAR SPACES)

Nội dung cơ bản

- Vectơ dòng, cột n chiều và các phép toán vectơ. Vec tơ trong kinh tế.
- Không gian $\mathbf{R}^n$. Sơ lược về không gian vectơ
- Tổ hợp tuyến tính. Độc lập và phụ thuộc tuyến tính. Hạng của hệ vectơ.
- Cơ sở, số chiều. Tọa độ của vectơ.
- *Đổi cơ sở. Công thức đổi tọa độ.*

Thuật ngữ then chốt (Việt – Anh)

- **Vectơ & vô hướng – Vector & Scalar**; **- Phép toán tuyến tính – Linear Operation**;
- **Phép cộng vectơ – Vector Addition**; **- Nhân số với vectơ – Scalar Multiplication**;
- **Không gian vectơ / Không gian tuyến tính – Vector Space / Linear Space**;
- **Tổ hợp tuyến tính** – **Linear Combination**; - Vec tơ không – **Zero Vetor**;
- **Độc lập tuyến tính /phụ thuộc tuyến tính – Linear Independence / Linear Dependence**;
- **Hạng của hệ vectơ** – **Rank of a system of vectors**;
- **Cơ sở & số chiều – Basis & Dimension**; **- Tọa độ/Đổi cơ sở – Coodinates/Change of Basis**.

II.1. KHÔNG GIAN R^n

II.1.1. VECTƠ DÒNG VÀ CỘT – CÁC PHÉP TOÁN VECTƠ

1. Tập hợp R^n

Tập hợp $\mathbf{R}^n$ là lũy thừa Đề-Các bậc n của tập số thực, tức là

$$\mathbf{R}^n := \{x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \,/\, x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbf{R}\},\ 0 < n \in \mathbf{N}.$$

2. Vectơ dòng hay cột

2.1. Mỗi phần tử $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ được gọi là một ***vectơ dòng n chiều*** hay đơn giản là ***vectơ n chiều*** khi không sợ nhầm lẫn. Lúc này, ta hình dung $\mathbf{R}^n$ như tập các ma trận dòng n phần tử (cấp $1\times n$).

2.2. Nếu ta xem mỗi phần tử của $\mathbf{R}^n$ như một cột $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ (cấp n × 1) thì ta sẽ gọi x là một ***vec tơ cột n chiều***. Lúc này, $\mathbf{R}^n$ lại được hình dung như tập các ma trận cột n phần tử (cấp n × 1).

2.3.Vectơ không

Dòng **O =** (0, 0, …, 0) hay cột $\mathbf{O} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$ trong $\mathbf{R}^n$ được gọi là ***vec tơ không*** (dòng hay cột).

2.4. Nhận xét

a) Đương nhiên việc biểu diễn các phần tử trong $\mathbf{R}^n$ dưới dạng vectơ dòng hay cột chỉ là hình thức và tùy vào sự tiện dùng chứ thực chất không làm thay đổi bản chất sự việc. Tùy vào phép tính toán về sau, lúc thì dạng dòng tiện lợi khi thì dạng cột được ưu tiên.

b) Hai vectơ bằng nhau khi và chỉ khi chúng bằng nhau như hai ma trận (dòng hay cột). Như vậy, với $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ bất kỳ trong $\mathbf{R}^n$, ta có

$$x = y \iff x_j = y_j;\ j = 1, 2, \ldots, n.$$

c) Để phân biệt với các vectơ, mỗi số thực còn được gọi là một ***vô hướng***.

? Hãy tự tìm hiểu vai trò của vectơ n chiều trong kinh tế.

3. Các phép toán vectơ

Vì các vectơ n chiều thực chất là các ma trận dòng hay cột nên ta có thể làm các phép toán trên chúng như đối với các ma trận.

3.1. Phép cộng vectơ

Với hai vec tơ n chiều tùy ý, ta định nghĩa tổng của chúng như tổng hai ma trận (dòng hay cột) cùng cấp. Nghĩa là

a) Cộng hai vectơ dòng

$$x + y := (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n);\ \forall x = (x_1, x_2, \ldots, x_n),\ y = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in \mathbf{R}^n.$$

b) Cộng hai vectơ cột

$$x + y := \begin{bmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{bmatrix}; \forall x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \in \mathbf{R}^n.$$

3.2. Phép nhân một vô hướng (số) với vectơ

a) Phép nhân một vô hướng (số) với vectơ dòng

$$a.x := (ax_1, ax_2, \ldots, ax_n);\ \forall x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbf{R}^n,\ \forall a \in \mathbf{R}.$$

b) Phép nhân một vô hướng (số) với vectơ cột

$$a.x := \begin{bmatrix} ax_1 \\ ax_2 \\ \vdots \\ ax_n \end{bmatrix}; \forall x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \in \mathbf{R}^n, \forall a \in \mathbf{R}.$$

c) Với mỗi vectơ x tùy ý, vectơ (– 1)x được viết lại là – x và gọi là ***vec tơ đối*** của x.
Các phép toán vectơ nêu trên còn được gọi là các ***phép toán tuyến tính***.

4. Các tính chất cơ bản của các phép toán tuyến tính

Các phép toán tuyến tính có nhiều tính chất, trong đó có 8 tính chất cơ bản dưới đây.

4.1. $(x + y) + z = x + (y + z)$; $\forall x, y, z \in \mathbf{R}^n$.

4.2. $x + \mathbf{O} = \mathbf{O} + x = x$, $\forall x \in \mathbf{R}^n$.

4.3. $x + (-x) = (-x) + x = \mathbf{O}$, $\forall x \in \mathbf{R}^n$.

4.4. $x + y = y + x$; $\forall x, y \in \mathbf{R}^n$.

4.5. $a(x + y) = ax + ay$; $\forall x, y \in \mathbf{R}^n$, $\forall a \in \mathbf{R}$.

4.6. $(a + b)x = ax + bx$; $\forall x \in \mathbf{R}^n$, $\forall a, b \in \mathbf{R}$.

4.7. $(ab)x = a(bx) = b(ax)$; $\forall x \in \mathbf{R}^n$, $\forall a, b \in \mathbf{R}$.

4.8. $1.x = x$, $\forall x \in \mathbf{R}^n$.

? Hãy tự kiểm chứng các tính chất nêu trên.

II.1.2. KHÔNG GIAN $\mathbf{R}^n$

1. Định nghĩa: Tập hợp các vectơ (dòng hay cột) n chiều $\mathbf{R}^n$ cùng với hai phép toán tuyến tính được gọi là ***không gian (vec tơ)*** $\mathbf{R}^n$.

2. Nhận xét

a) Khi dùng tên "không gian (vec tơ) $\mathbf{R}^n$", chủ ý của ta là muốn nhấn mạnh đến cấu trúc của $\mathbf{R}^n$, tức là các phép toán tuyến tính và các tính chất cơ bản nêu trên.

b) Khi n = 2, 3 dễ thấy $\mathbf{R}^2$ có thể đồng nhất với mặt phẳng tọa độ Đề-Các vuông góc Oxy, còn $\mathbf{R}^3$ có thể đồng nhất với không gian tọa độ Đề-Các vuông góc Oxyz.

? Hãy tự kiểm chứng điều này.

II.1.3. *SƠ LƯỢC VỀ KHÔNG GIAN VECTƠ TRỪU TƯỢNG*

1. *Định nghĩa không gian vectơ*

Xét V là một tập không rỗng mà mỗi phần tử được ký hiệu bởi các chữ la-tinh u, v, x, y, z, … Giả sử đã cho hai phép toán như sau:

+ Phép cộng vectơ $V \times V \to V$, $(x, y) \mapsto x + y$;

+ Phép nhân một vô hướng (số) với vectơ $\mathbf{R} \times V \to V$, $(a, y) \mapsto ax$.

*Ta bảo V cùng với hai phép toán tuyến tính đã cho tạo thành một **không gian vectơ** hay **không gian tuyến tính** nếu 8 tiên đề dưới đây thỏa mãn.*

[A1] $(x + y) + z = x + (y + z)$; $\forall x, y, z \in \mathbf{R}^n$.

*[A2] Tồn tại một vectơ trong V mà được gọi là vec tơ không, ký hiệu **O**, sao cho*

$$x + \mathbf{O} = \mathbf{O} + x = x, \ \forall x \in \mathbf{R}^n.$$

[A3] Với mỗi x thuộc V, tồn tại một vectơ thuộc V, ký hiệu – x, sao cho

$$x + (-x) = (-x) + x = \mathbf{O}, \ \forall x \in \mathbf{R}^n.$$

[A4] $x + y = y + x$; $\forall x, y \in \mathbf{R}^n$.

[M1] $a(x + y) = ax + ay$; $\forall x, y \in \mathbf{R}^n$, $\forall a \in \mathbf{R}$.

[M2] $(a + b)x = ax + bx$; $\forall x \in \mathbf{R}^n$, $\forall a, b \in \mathbf{R}$.

[M3] $(ab)x = a(bx) = b(ax)$; $\forall x \in \mathbf{R}^n$, $\forall a, b \in \mathbf{R}$.

[M4] $1.x = x$, $\forall x \in \mathbf{R}^n$.

2. ***Vài mô hình kinh điển về không gian vectơ:***
   + *Không gian số học* $\mathbf{R}^n$.
   + *Không gian các vectơ tự do trong hình học sơ cấp.*
   + *Không gian các đa thức.*
   + *Không gian các hàm số liên tục trên một đoạn.*
   + *Không gian các ma trận cùng cấp.*
   + *Không gian các nghiệm của một hệ PTTT thuần nhất.*

Trong phần còn lại của chương, ta sẽ chỉ nghiên cứu một số khái niệm và tính chất trong $\mathbf{R}^n$ mặc dù chúng có cả trong một không gian vectơ bất kỳ.

II.2. TỔ HỢP TUYẾN TÍNH – ĐỘC LẬP VÀ PHỤ THUỘC TUYẾN TÍNH – HẠNG CỦA HỆ VECTƠ

II.2.1. TỔ HỢP TUYẾN TÍNH VÀ BIỂU DIỄN TUYẾN TÍNH

1. **Tổ hợp tuyến tính và biểu diễn tuyến tính**

   Trong không gian $\mathbf{R}^n$ xét vectơ v cùng với một hệ m vec tơ $v_1, v_2, \ldots, v_m$. Giả sử có đẳng thức

   $$v = a_1.v_1 + a_2.v_2 + \ldots + a_m.v_m \qquad (2.1)$$

   ở đó $a_1, a_2, \ldots, a_m$ là m số thực nào đó. Khi đó, vế phải của đẳng thức (2.1) được gọi là một ***tổ hợp tuyến tính*** của hệ $v_1, v_2, \ldots, v_m$ (ứng với họ hệ số $a_1, a_2, \ldots, a_m$). Ta cũng bảo v được ***biểu diễn*** (hay ***biểu thị***) ***tuyến tính*** qua hệ $v_1, v_2, \ldots, v_m$.

   Tổ hợp tuyến tính $a_1.v_1 + a_2.v_2 + \ldots + a_m.v_m$ được gọi là ***tầm thường*** nếu mọi hệ số đều bằng không: $a_1 = a_2 = \ldots = a_m = 0$. Ngược lại, nếu tồn tại dù chỉ một hệ số a_i $(1 \le i \le m)$ nào đó khác không thì tổ hợp tuyến tính $a_1.v_1 + a_2.v_2 + \ldots + a_m.v_m$ được gọi là ***không tầm thường***.

2. **Ví dụ và nhận xét**

   a) Ví dụ 1: Xét $v_1 = (1, 1, 2, 3)$, $v_2 = (2, 3, 4, 4)$, $v_3 = (8, 11, 16, 18) \in \mathbf{R}^4$. Ta có
   + $v_3 = 2v_1 + 3v_2$, tức là v_3 được biểu diễn tuyến tính qua hệ v_1, v_2.
   + $\mathbf{O} = 2v_1 + 3v_2 - v_3 = 0.v_1 + 0.v_2 + 0.v_3$. Nghĩa là vec tơ không **O** có ít nhất hai cách biểu thị tuyến tính qua hệ v_1, v_2, v_3.

   b) Vectơ không **O** luôn được biểu diễn tuyến tính qua mọi hệ vectơ bởi tổ hợp tuyến tính tầm thường: $\mathbf{O} = 0.v_1 + 0.v_2 + \ldots + 0.v_m$. Tuy nhiên, đó có thể không phải là cách biểu diễn duy nhất.

   c) Ví dụ 2: Trong $\mathbf{R}^3$ cho $v_1 = (1, 2, 3)$, $v_2 = (2, 3, 4)$ và $v = (5, 9, m)$ với m là tham số thực. Tìm giá trị của m để v được biểu thị tuyến tính qua hệ v_1, v_2. Với giá trị tìm được của m, cách biểu thị v qua v_1, v_2 có duy nhất không? Tại sao?

   <u>**Giải**</u> Rõ ràng, v được biểu diễn tuyến tính qua v_1, v_2 khi và chỉ khi tìm được hai số x_1, x_2 sao cho

   $$v = x_1.v_1 + x_2.v_2 \Leftrightarrow (5, 9, m) = x_1(1, 2, 3) + x_2(2, 3, 4)$$
   $$\Leftrightarrow (5, 9, m) = (x_1 + 2x_2, 2x_1 + 3x_2, 3x_1 + 4x_2)$$
   $$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 & +2x_2 & = 5 \\ 2x_1 & +3x_2 & = 9 \\ 3x & +4x_2 & = m \end{cases} \qquad (2.2)$$

   Rõ ràng v được biểu diễn tuyến tính qua v_1, v_2 khi và chỉ khi hệ (2.2) có nghiệm đối với hai ẩn số x_1, x_2. Hơn nữa, cách biểu diễn sẽ duy nhất hay không tùy vào hệ (2.2) có nghiệm duy nhất hay không.

Dễ thấy hệ (2.2) có nghiệm khi và chỉ khi m = 13 và lúc đó hệ có nghiệm duy nhất $x_1 = 3$, $x_2 = 1$.

? Hãy tự kiểm chứng lại điều này.

d) Như vậy, *việc trả lời câu hỏi vectơ v có được biểu thị tuyến tính qua một hệ vectơ nào đó hay không được quy về việc xét điều kiện có nghiệm của một hệ PTTT. Tính duy nhất của cách biểu thị tuyến tính được quy về xét tính duy nhất nghiệm của hệ PTTT*.

3. Tính độc lập tuyến tính hay phụ thuộc tuyến tính của hệ vectơ

a) Định nghĩa

Xét hệ m vectơ bất kỳ $v_1, v_2, \ldots, v_m$ trong $\mathbf{R}^n$.

+ Ta bảo hệ ***độc lập tuyến tính*** (đltt) nếu vectơ không **O** chỉ có duy nhất một cách duy nhất biểu diễn tuyến tính qua hệ bởi tổ hợp tuyến tính tầm thường.

+ Ngược lại, hệ không đltt được gọi là ***phụ thuộc tuyến tính*** (pttt).

b) Nhận xét

+ Hệ $v_1, v_2, \ldots, v_m$ đltt nếu từ một tổ hợp tuyến tính bất kỳ của hệ mà bằng không lập tức suy ra tổ hợp đó tầm thường:

$$(a_1.v_1 + a_2.v_2 + \ldots + a_m.v_m = \mathbf{O}) \Rightarrow (a_1 = a_2 = \ldots = a_m = 0).$$

+ Ngược lại, hệ $v_1, v_2, \ldots, v_m$ pttt nếu có ít nhất một tổ hợp tuyến tính không tâm thường mà bằng không của hệ, tức là tìm được m số thực $a_1, a_2, \ldots, a_m$ không đồng thời triệt tiêu sao cho $a_1.v_1 + a_2.v_2 + \ldots + a_m.v_m = \mathbf{O}$.

4. Điều kiện độc lập hay phụ thuộc tuyến tính

Trong $\mathbf{R}^n$ cho hệ m vectơ (dòng) tùy ý $v_1, v_2, \ldots, v_m$. ***Thiết lập ma trận A bằng cách xếp $v_1, v_2, \ldots, v_m$ lần lượt là dòng 1, 2, …, m.*** Khi đó ta có

a) (Hệ $v_1, v_2, \ldots, v_m$ đltt) $\Leftrightarrow$ (rankA = m = số vectơ của hệ).

b) (Hệ $v_1, v_2, \ldots, v_m$ pttt) $\Leftrightarrow$ (rankA < m = số vectơ của hệ).

Đặc biệt khi m = n, ta có

c) (Hệ $v_1, v_2, \ldots, v_n$ đltt) $\Leftrightarrow$ (detA $\neq$ 0).

d) (Hệ $v_1, v_2, \ldots, v_n$ pttt) $\Leftrightarrow$ (detA = 0).

? Hãy tự chứng minh các khẳng định trên.

5. Điều kiện biểu thị tuyến tính

Trong $\mathbf{R}^n$ cho vectơ v và hệ m vectơ (cột) tùy ý $v_1, v_2, \ldots, v_m$. ***Thiết lập ma trận A bằng cách xếp $v_1, v_2, \ldots, v_m$ lần lượt là cột 1, 2, …, m*** và ma trận ***A' nhận được từ A bằng cách thêm cột v vào bên phải A (làm cột thứ m + 1)***. Khi đó ta có

a) (v được biểu diễn tuyến tính qua hệ $v_1, v_2, \ldots, v_m$) $\Leftrightarrow$ (rankA = rankA').

b) (v được biểu diễn tuyến tính một cách duy nhất qua hệ $v_1, v_2, \ldots, v_m$)

$\Leftrightarrow$ (rankA = rankA' và hệ $v_1, v_2, \ldots, v_m$ đltt) $\Leftrightarrow$ (rankA = rankA' = m) .

? Hãy tự chứng minh các khẳng định trên.

6. Các ví dụ

a) Ví dụ 3: Trong $\mathbf{R}^4$, xét tính đltt hay pttt của hệ vectơ sau đây tùy theo tham số thực m.

$$v_1 = (1, 2, 2, 1),\ v_2 = (2, 5, 6, 5),\ v_3 = (4, 9, 10, m).$$

<u>**Giải**</u> Xét ma trận A mà v_1, v_2, v_3 lần lượt là các dòng 1, 2, 3 rồi BĐSC ta được

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 6 & 5 \\ 4 & 9 & 10 & m \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & m-4 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & m-7 \end{bmatrix} \text{ (Bậc thang)}$$

Rõ ràng $\text{rankA} = \begin{cases} 2 & khi \quad m = 7; \\ 3 & khi \quad m \neq 7. \end{cases}$

Vậy, hệ v_1, v_2, v_3 pttt khi $m = 7$ và đltt khi $m \neq 7$.

b) Ví dụ 4: Trong $\mathbf{R}^3$, xét tính đltt hay pttt của hệ vectơ sau đây tùy theo tham số thực m.

$$v_1 = (1, 2, 4),\ v_2 = (3, 5, 6),\ v_3 = (4, 7, m).$$

<u>**Giải**</u> Xét ma trận A mà v_1, v_2, v_3 lần lượt là các dòng 1, 2, 3. Ta được $\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 5 & 6 \\ 4 & 7 & m \end{vmatrix} = 10 - m.$

Vậy v_1, v_2, v_3 đltt khi $m \neq 10$ và pttt khi $m = 10$.

c) Ví dụ 5: Trong $\mathbf{R}^4$ xét các vectơ

$$v_1 = (1, 2, 3, 6),\ v_2 = (3, 7, 10, 20),\ v_3 = (4, 9, 14, 27),\ v = (7, 16, 20, m).$$

Tìm điều kiện của tham số thực m để v biểu diễn tuyến tính qua v_1, v_2, v_3.

<u>**Giải**</u> Viết các vectơ đã cho dưới dạng cột rồi lập ma trận A (cấp 4×3) nhận được từ các cột v_1, v_2, v_3. Sau đó thêm v vào làm cột thứ tư ta được ma trận A'. BĐSC ta được

$$[A|v] = A' \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 4 & 7 \\ 2 & 7 & 9 & 16 \\ 3 & 10 & 14 & 20 \\ 6 & 20 & 27 & m \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 4 & 7 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 3 & m-42 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 4 & 7 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & m-46 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 4 & 7 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & m-43 \end{array}\right].$$

Rõ ràng rankA = 3 (không phụ thuộc m), rankA' = $\begin{cases} 3 & khi \quad m = 43; \\ 4 & khi \quad m \neq 43. \end{cases}$

Vậy v được biểu diễn tuyến tính qua v_1, v_2, v_3 khi và chỉ khi $m = 43$.

Nhận xét: Vì rankA = 3 nên v_1, v_2, v_3 đltt. Do đó khi $m = 43$, v được biểu diễn tuyến tính qua v_1, v_2, v_3 một cách duy nhất.

II.2.2. HẠNG CỦA HỆ VECTƠ

1. **Định nghĩa**: Trong $\mathbf{R}^n$ xét hệ m vec tơ $v_1, v_2, \ldots, v_m$. Ta bảo hệ có hạng là r (r là một số tự nhiên), ký hiệu $\text{rank}(v_1, v_2, \ldots, v_m) = r$, nếu hai điều kiện dưới đây thỏa mãn.
   (i) Tìm được r vectơ nào đó trong hệ $v_1, v_2, \ldots, v_m$ sao cho hệ r vec tơ đó đltt.
   (ii) Nếu ta bổ sung thêm bất kỳ một vectơ nào trong $v_1, v_2, \ldots, v_m$ vào hệ r vectơ đó, ta đều nhận được hệ pttt.
   Hệ r vectơ thỏa mãn hai điều kiện trên được gọi là ***hệ con đltt tối tại*** của hệ $v_1, v_2, \ldots, v_m$.
2. **Nhận xét**: Hiển nhiên $0 \leq \text{rank}(v_1, v_2, \ldots, v_m) \leq m$ (số vectơ của hệ). Hơn nữa
   $$(\text{rank}(v_1, v_2, \ldots, v_m) = m) \iff (\text{hệ } v_1, v_2, \ldots, v_m \text{ đltt}).$$
3. **Mệnh đề**: Trong $\mathbf{R}^n$ cho vectơ v hệ vectơ $v_1, v_2, \ldots, v_m$ tùy ý.
   \+ Viết các vectơ theo dòng và thiết lập ma trận A mà các dòng lần lượt là $v_1, v_2, \ldots, v_m$. khi đó ta có $\text{rank}(v_1, v_2, \ldots, v_m) = \text{rank}A$.
   \+ Viết các vectơ theo cột và thiết lập ma trận A mà các cột lần lượt là $v_1, v_2, \ldots, v_m$. khi đó ta có $\text{rank}(v_1, v_2, \ldots, v_m) = \text{rank}A$.
   \+ (v biểu diễn tuyến tính qua $v_1, v_2, \ldots, v_m$) $\Leftrightarrow$ $\text{rank}(v_1, v_2, \ldots, v_m) = \text{rank}(v_1, v_2, \ldots, v_m, v)$
4. **Ví dụ 6**: Tìm điều kiện của tham số thực m để hệ vectơ dưới đây trong $\mathbf{R}^4$ có hạng lớn nhất.
   $$v_1 = (1, 2, 2, 1),\ v_2 = (2, 5, 6, 5),\ v_3 = (4, 9, 10, m).$$
   <u>**Giải**</u> Xét ma trận A mà v_1, v_2, v_3 lần lượt là các dòng 1, 2, 3 rồi BĐSC ta được
   $$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 6 & 5 \\ 4 & 9 & 10 & m \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & m-4 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & m-7 \end{bmatrix} \text{ (Bậc thang)}$$

Rõ ràng rankA = $\begin{cases} 2 & khi \quad m = 7; \\ 3 & khi \quad m \neq 7. \end{cases}$ Vậy rank(v_1, v_2, v_3) = rankA = 3 là lớn nhất và đạt được khi và chỉ khi m $\neq$ 7.

II.3. CƠ SỞ – SỐ CHIỀU – TOẠ ĐỘ

II.3.1. CƠ SỞ VÀ SỐ CHIỀU

1. **Cơ sở**: Hệ (sắp thứ tự) (B) = (b_1, b_2, …, b_m) các vectơ trong $\mathbf{R}^n$ được gọi là một ***cơ sở*** của $\mathbf{R}^n$ nếu (B) đltt và mọi vec tơ bất kỳ của $\mathbf{R}^n$ đều được biểu diễn tuyến tính qua (B).
2. **Định lý**: ***Cho hệ (sắp thứ tự) (B) các vectơ trong R^n. Khi đó hai khẳng định dưới đây tương đương.***
   (i) ***(B) là một cơ sở của R^n.***
   (ii) ***(B) đltt và gồm đúng n vectơ.***
3. **Nhận xét**: Như vậy, mỗi cơ sở trong $\mathbf{R}^n$ đều có số vectơ bằng nhau và đúng bằng n. Hơn nữa, giả sử có hệ sắp thứ tự n vectơ (B) = (b_1, b_2, …, b_n). Thiết lập ma trận B bằng cách xếp các b_1, b_2, …, b_n thành dòng (hay cột). Khi đó ta có
   $$((B) \text{ là cơ sở } \mathbf{R}^n) \Leftrightarrow (\det B \neq 0) \Leftrightarrow (\text{rank}B = n).$$
4. **Số chiều**: Số vectơ của mỗi cơ sở trong $\mathbf{R}^n$ được gọi là ***số chiều*** của $\mathbf{R}^n$, ký hiệu dim$\mathbf{R}^n$ = n. Ta cũng bảo $\mathbf{R}^n$ là một không gian n chiều.
5. **Ví dụ 7 (cơ sở chính tắc)**: Hiển nhiên bộ n vectơ
   $$C(n) := (\, e_1=(1, 0, 0, \ldots, 0, 0),\ e_2 = (0, 1, 0, \ldots, 0, 0),\ \ldots,\ e_n = (0, 0, 0, \ldots, 0, 1)\,)$$
   là một cơ sở của $\mathbf{R}^n$ và được gọi là cơ sở chính tắc.
6. **Ví dụ 8**: Tìm điều kiện của tham số thực m để hệ
   $$(B) = (b_1= (1, 2, 3),\ b_2 = (2, 5, 6),\ b_3 = (3, 7, m))$$
   là một cơ sở của $\mathbf{R}^3$.
   <u>**Giải**</u> Vì (B) gồm 3 vectơ trong $\mathbf{R}^3$ nên chỉ cần kiểm tra tính đltt của (B). Xét định thức cấp 3 tạo bởi các dòng b_1, b_2, b_3. Ta có
   $$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 6 \\ 3 & 7 & m \end{vmatrix} = m - 9 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 9.$$
   Vậy (B) là một cơ sở của $\mathbf{R}^3$ khi và chỉ khi m $\neq$ 9.
7. **Nhận xét**:
   a) Trong không gian $\mathbf{R}^n$, mỗi hệ gồm nhiều hơn n vectơ đều pttt. Mỗi hệ đltt đều gồm không quá n vectơ.
   b) Xét một hệ PTTT thuần nhất n ẩn với ma trận hệ số hạng r (0 < r < n). Khi đó tập nghiệm của hệ này là một không gian vectơ n – r chiều và được gọi là không gian nghiệm của hệ đang xét. Mỗi hệ nghiệm cơ bản của hệ chính là một cơ sở của không gian nghiệm.

   ? Hãy tự kiểm chứng các điều trên.

II.3.2. TỌA ĐỘ

1. **Định lý**: ***Trong R^n cho cơ sở (B) = (b_1, b_2, …, b_n). Khi đó, mỗi vectơ x trong R^n đều được biểu diễn tuyến tính một cách duy nhất qua (B), tức là luôn tìm được duy nhất n số thực x_1, x_2, …, x_n sao cho $x = x_1b_1 + x_2b_2 + \ldots + x_nb_n$.***
2. **Định nghĩa**: Bộ n số thực sắp thứ tự (x_1, x_2, …, x_n) trong biểu thức ở định lý trên được gọi là ***(bộ) toạ độ*** của vectơ x đối với (hay trong) cơ sở (B), ký hiệu $[x]_{(B)}$ = (x_1, x_2, …, x_n).
   Khi cơ sở đã được chỉ rõ và không sợ nhầm lẫn, ta chỉ viết $[x]_{(B)}$ đơn giản là [x] và gọi là ***dòng tọa độ*** của x đối với (hay trong) cơ sở (B).

Chuyển vị của nó, $[x]^t = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ được gọi là cột tọa độ của x đối với (hay trong) cơ sở (B).

3. Nhận xét: Trong $\mathbf{R}^n$, tọa độ của vectơ bất kỳ x = $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ trong cơ sở chính tắc C(n) chính là bộ $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

? Hãy tự kiểm chứng điều này.

4. Ví dụ 9: Trong $\mathbf{R}^3$ cho các vectơ $b_1 = (1, 1, 2)$, $b_2 = (2, 3, 5)$, $b_3 = (3, 4, 8)$, x = (11, 13, 29).

a) Chứng tỏ rằng (B) = (b_1, b_2, b_3) là một cơ sở của $\mathbf{R}^3$.

b) Tìm tọa độ của x trong (B).

__**Giải**__ a) (B) gồm 3 vectơ trong $\mathbf{R}^3$, hơn nữa sắp b_1, b_2, b_3 thành dòng ta được định thức $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 5 \\ 3 & 4 & 8 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$, nghĩa là (B) đltt. Do đó (B) là một cơ sở của $\mathbf{R}^3$.

b) Giả sử (x_1, x_2, x_3) là tọa độ của x trong (B). Ta có

$$[x]_{(B)} = (x_1, x_2, x_3) \Leftrightarrow x = x_1b_1 + x_2b_2 + x_3b_3$$
$$\Leftrightarrow (11, 13, 29) = (x_1, x_1, 2x_1) + (2x_2, 3x_2, 5x_2) + (3x_3, 4x_3, 8x_3)$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 11; \\ x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 13; \\ 2x_1 + 5x_2 + 8x_3 = 29. \end{cases}$$

Đây là hệ Cramer, giải hệ ta được nghiệm duy nhất $x_1 = 2$, $x_2 = -3$; $x_3 = 5$.

Vậy, tọa độ của x trong cơ sở (B) là [x] = (2, – 3, 5).

Thử lại: Có thể kiểm tra lại các tính toán nhờ xét đẳng thức $x = 2b_1 - 3b_2 + 5b_3$.

5. Nhận xét: Qua ví dụ trên ta thấy, việc tìm toạ độ của một vectơ cho trước trong một cơ sở đã cho quy về phép giải một hệ PTTT Cramer.

6. Sơ lược về đổi cơ sở - Ma trận và công thức đổi tọa độ

a) Đặt vấn đề: *Giả sử trong $\mathbf{R}^n$ ta xét cùng một lúc hai cở (B) = $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ và cơ sở (B') = $(b_1', b_2', \ldots, b_n')$. Khi đó mỗi vectơ x thuộc $\mathbf{R}^n$ nói chung sẽ có hai bộ tọa độ khác nhau đối với hai cơ sở đang xét: $[x]_{(B)} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ và $[x]_{(B')} = (x_1', x_2', \ldots, x_n')$. Ta sẽ tìm một biểu thức liên hệ giữa hai bọ tọa độ này để khi biết một trong chúng ta sẽ tìm được cả hai.*

b) Sơ lược giải quyết vấn đề: *Ta thực hiện các bước dưới đây.*

+ ***Bước 1***: *Tìm tọa độ của từng vectơ b_j' của cơ sở (B') trong cơ sở (B), j = 1, 2, ..., n.*
+ ***Bước 2***: *Thiết lập ma trận $C = [c_{ij}]_n$ vuông cấp n mà cột thứ j chính là cột tọa độ của b_j' trong (B). C gọi là **ma trận đổi** (hay **chuyển**) **cơ sở** từ (B) sang (B').*
+ ***Bước 3***: *Thiết lập công thức đổi tọa độ từ (B) sang (B'): $[x]_{(B)} = C[x]_{(B')}$.*

c) Nhận xét: *Ma trận đổi cơ sở C từ (B) sang (B') luôn luôn khả nghịch và C^{-1} chính là ma trận đổi cơ sở ngược lại từ (B') sang (B).*

***7.* Ví dụ 10**: *Trong $\mathbf{R}^3$ xét cơ sở chính tắc C(3) cùng với cơ sở*

(B) = ($b_1 = (1, 2, 3)$, $b_2 = (1, 3, 4)$, $b_3 = (2, 4, 7)$).

a) *Lập ma trận đổi cơ sở và công thức đổi tọa độ từ C(3) sang (B) và ngược lại từ (B) sang C(3).*

b) *Tìm tọa độ của vectơ x = (5, 7, 9) trong (B).*

<u>Giải</u> **a)** *Vì tọa độ của mỗi vectơ trong C(3) là chính nó nên ma trận đổi cơ sở từ C(3) sang (B) là* $C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 7 \end{bmatrix}$. *Còn ma trận đổi ngược lại từ (B) sang C(3) là* $C^{-1} = \begin{bmatrix} 5 & 1 & -2 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$.

Giả sử x = (x_1, x_2, x_3) là vectơ bất kỳ trong $\mathbf{R}^3$. *Đương nhiên tọa độ của x trong C(3) chính là (x_1, x_2, x_3). Ký hiệu tọa độ của x trong (B) là* $[x]_{(B)} = (u, v, w)$. *Khi đó, công thức đổi tọa độ từ C(3) sang (B) như sau*

$$[x]_{C(3)} = C[x]_{(B)} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = u + v + 2w; \\ x_2 = 2u + 3v + 4w; \\ x_3 = 3u + 4v + 7w. \end{cases} \quad (3.2.1)$$

Còn công thức đổi tọ độ ngược lại từ (B) sang C(3) là

$$[x]_{(B)} = C^{-1}[x]_{C(3)} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 1 & -2 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} u = 5x_1 + x_2 - 2x_3; \\ v = -2x_1 + x_2 \;; \\ w = -x_1 - x_2 + x_3. \end{cases} \quad (3.2.2)$$

b) *x = (5, 7, 9) nghĩa là* $x_1 = 5, x_2 = 7, x_3 = 9$. *Thay vào (3.2.2) ta tìm được tọa độ của x trong (B) là* $[x]_{(B)} = (14, -3, -3)$ *hay* $x = 14b_1 - 3b_2 - 3b_3$.

II.4. *SƠ LƯỢC VỀ KHÔNG GIAN CON – BAO TUYẾN TÍNH (SV tự đọc tài liệu tham khảo)*

II.5. *SƠ LƯỢC VỀ KHÔNG GIAN EUCLIDE (SV tự đọc tài liệu tham khảo)*

BÀI TẬP CHƯƠNG II

II.1. Xét tính độc lập tuyến tính, phụ thuộc tuyến tính của các hệ vectơ dưới đây trong không gian đã chỉ ra.?

- **a)** $v_1 = (1, -3, 5), v_2 = (2, 2, 4), v_3 = (4, -4, 14)$ trong $\mathbf{R}^3$.
- **b)** $v_1 = (1, 1, 2, -3), v_2 = (2, 3, 5, 8), v_3 = (3, 4, 7, 5)$ trong $\mathbf{R}^4$.
- **c)** $v_1 = (1, 2, -3, 4), v_2 = (2, 5, 1, 7), v_3 = (4, 9, -5, 16)$ trong $\mathbf{R}^4$.

II.2. Tìm điều kiện của tham số m để hệ vectơ dưới đây độc lập tuyến tính

- **a)** $v_1 = (1, 2, 2), v_2 = (2, 5, 4), v_3 = (4, 9, m)$ trong $\mathbf{R}^3$.
- **b)** $v_1 = (1, 1, 2, -3), v_2 = (2, 3, 5, 8), v_3 = (5, 6, 11, m)$ trong $\mathbf{R}^4$.
- **c)** $v_1 = (1, 2, 3, 4), v_2 = (3, 7, 9, 15), v_3 = (9, 20, 27, m)$ trong $\mathbf{R}^4$.

II.3. Tìm điều kiện của tham số m để hệ vectơ v được biểu thị tuyến tính qua hệ vectơ đã cho dưới đây

- **a)** $v_1 = (1, 1, 2), v_2 = (3, 4, 5), v_3 = (4, 5, 7), v = (13, 16, m)$.
- **b)** $v_1 = (1, 1, 2, 3), v_2 = (2, 3, 5, 8), v_3 = (5, 6, 11, 17), v = (12, 15, 27, m)$.
- **c)** $v_1 = (1, 2, 3, 4), v_2 = (3, 7, 9, 15), v_3 = (6, 13, 18, 27), v = (10, 22, 30, m)$.

II.4. Tính hạng của các hệ vectơ dưới đây

- **a)** $v_1 = (1, 2, 2), v_2 = (2, 5, 4), v_3 = (5, 11, 10)$.
- **b)** $v_1 = (1, 1, 2, 3), v_2 = (2, 3, 5, 8), v_3 = (5, 6, 11, 17), v_4 = (12, 15, 27, 42)$.

c) $v_1 = (1, 2, 3, 4)$, $v_2 = (3, 7, 9, 15)$, $v_3 = (6, 13, 18, 27)$, $v = (10, 22, 30, 46)$.

II.5. Tìm điều kiện của tham số m để hệ dưới đây có hạng lớn nhất

a) $v_1 = (1, 2, 2)$, $v_2 = (3, 7, 5)$, $v_3 = (4, 9, 7)$, $v = (13, 16, m)$.

b) $v_1 = (1, 1, 2, 4)$, $v_2 = (2, 3, 5, 9)$, $v_3 = (5, 6, 11, 21)$, $v = (8, 10, 18, m)$.

c) $v_1 = (1, 2, 3, 4)$, $v_2 = (4, 9, 9, 10)$, $v_3 = (6, 13, 15, 19)$, $v = (11, 24, 27, m)$.

II.6. Hệ vec tơ nào dưới đây là cơ sở của không gian đã chỉ ra.

a) $v_1 = (1, 2, 3)$, $v_2 = (3, 1, 2)$, $v_3 = (2, 3, 1)$ trong $\mathbf{R}^3$.

b) $v_1 = (1, 2, 2, 3)$, $v_2 = (2, 5, 6, 8)$, $v_3 = (3, 7, 9, 12)$, $v_4 = (5, 12, 15, 20)$ trong $\mathbf{R}^4$.

c) $v_1 = (1, 2, 2, 1)$, $v_2 = (2, 5, 5, 2)$, $v_3 = (5, 11, 11, 6)$, $v_4 = (8, 18, 18, 10)$ trong $\mathbf{R}^4$.

II.7. Tìm điều kiện của tham số m để hệ dưới đây là cơ sở của không gian đã chỉ ra

a) $v_1 = (1, 2, 3)$, $v_2 = (3, 1, 2)$, $v_3 = (2, 3, m)$ trong $\mathbf{R}^3$.

b) $v_1 = (1, 2, 3, 4)$, $v_2 = (2, 5, 5, 8)$, $v_3 = (3, 7, 9, 11)$, $v_4 = (6, 14, 17, m)$ trong $\mathbf{R}^4$.

c) $v_1 = (1, 2, 1, 2)$, $v_2 = (3, 7, 3, 7)$, $v_3 = (4, 9, 5, 8)$, $v_4 = (4, 18, 9, m)$ trong $\mathbf{R}^4$.

II.8. Tìm tọa độ của vec tơ x dưới đây đối với cơ sở (B) đã cho trong $\mathbf{R}^3$.

a) (B) = ($b_1 = (1, 2, 3)$, $b_2 = (3, 1, 2)$, $b_3 = (2, 3, 1)$); $x = (2, 7, 3)$.

b) (B) = ($b_1 = (1, 3, 5)$, $b_2 = (3, 10, 14)$, $b_3 = (4, 13, 20)$); $x = (5, 16, 33)$.

c) (B) = ($b_1 = (1, 4, 5)$, $b_2 = (3, 13, 12)$, $b_3 = (5, 21, 23)$); $x = (2, 7, 14)$.

CHƯƠNG III. SƠ LƯỢC VỀ TOÁN TỬ TUYẾN TÍNH VÀ DẠNG TOÀN PHƯƠNG (LINEAR OPERATORS AND QUADRATIC FORMS)

Nội dung cơ bản

- Giá trị riêng, vectơ riêng của một ma trận và tính chéo hóa.
- Đa thức đặc trưng. Thuật toán tìm giá trị riêng, vectơ riêng và chéo hóa ma trận.
- Dạng toàn phương. Dạng chính tắc của dạng toàn phương. Luật quán tính.
- Thuật toán Lagrange đưa dạng toàn phương về dạng chính tắc.

Thuật ngữ then chốt

- **Giá trị riêng – Eigenvalue**; - **Vec tơ riêng – Eigenvector**;
- **Đa thức đặc trưng – Charateristic Polinomial System**;
- **Dạng toàn phương – Quadratic Form**.

III.1. *SƠ LƯỢC VỀ ÁNH XẠ TUYẾN TÍNH VÀ TOÁN TỬ TUYẾN TÍNH* (SV tự đọc)

III.2. GIÁ TRỊ RIÊNG, VECTƠ RIÊNG VÀ CHÉO HÓA MA TRẬN VUÔNG

III.2.1. ĐỊNH NGHĨA VÀ VÍ DỤ

1. Giá trị riêng, vectơ riêng

Cho ma trận A vông cấp n (n là số tự nhiên dương). Giả sử có đẳng thức $Av = \lambda v$, ở đó v là một vectơ (cột) khác không của $\mathbf{R}^n$ và λ là một số thực (vô hướng) nào đó. Khi đó ta nói λ là một ***giá trị riêng*** (GTR) của A, còn v là một ***vectơ riêng*** (VTR) của A ***ứng với*** GTR λ.

2. Ma trận vuông chéo hóa được và chéo hóa ma trận vuông

Cho ma trận $A = [a_{ij}]_n$ vông cấp n. Ta bảo A ***chéo hóa được*** nếu tìm được một ma trận C vuông cùng cấp n và khả nghịch sao cho $C^{-1}AC$ là ma trận chéo. Lúc đó, ma trận C được gọi là ma trận ***làm chéo hóa*** A, còn ma trận chéo $D = C^{-1}AC$ được gọi là ***dạng chéo*** của A. Khi A chéo hóa được, quá trình đi tìm ma trận C làm chéo hóa A và dạng chéo của A được gọi là quá trình ***chéo hóa*** ma trận vuông A.

3. Ví dụ

Ví dụ 1: Xét ma trận $A = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ -21 & 10 \end{bmatrix}$.

+ Vì $A\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} = 3\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$ nên $\lambda = 3$ là một GTR của A và $v = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$ là một VTR của A ứng với $\lambda = 3$.

+ Vì $A\begin{bmatrix} 2 \\ 7 \end{bmatrix} = 4\begin{bmatrix} 2 \\ 7 \end{bmatrix}$ nên $\lambda = 4$ là một GTR của A và $v = \begin{bmatrix} 2 \\ 7 \end{bmatrix}$ là một VTR của A ứng với $\lambda = 4$.

+ Vì $\begin{bmatrix} 7 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$ nên A chéo hóa được với $C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}$ là ma trận làm chéo hóa A và dạng chéo của A là $D = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$.

? Làm thế nào để tìm GTR và VTR và xét tính chéo hóa của một ma trận vuông đã cho?

Ví dụ 2: Ma trận A = $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$ không có GTR nào, không có VTR nào và không chéo hóa được.

? Hãy tự kiểm tra khẳng định này.

III.2.2. TÍNH CHẤT VÀ NHẬN XÉT

1. Đẳng thức $Av = \lambda v \Leftrightarrow (A - \lambda I)v = \mathbf{O}$, ở đây I là ma trận đơn vị cùng cấp với A. Như vậy, nếu λ là một GTR của A thì hệ PTTT thuần nhất $(A - \lambda I)v = \mathbf{O}$ ắt phải có nghiệm không tầm thường và mỗi nghiệm không tầm thường chính là một VTR của A ứng với GTR λ. Tất nhiên, nếu hệ $(A - \lambda I)v = \mathbf{O}$ chỉ có nghiệm tầm thường duy nhất thì λ không là GTR của A.
2. Định thức $\det(A - \lambda I)$ quyết định sự có nghiệm khác tầm thường hay không của hệ $(A - \lambda I)v = \mathbf{O}$. Cụ thể
   + Nếu $\det(A - \lambda I) \neq 0$ thì hệ không có nghiệm tầm thường. Khi đó λ không là GTR của A.
   + Nếu $\det(A - \lambda I) = 0$ thì hệ có vô số nghiệm không tầm thường. Khi đó λ là một GTR của A và mỗi nghiệm không tầm thường của hệ chính là một VTR của A ứng với GTR λ. Nói riêng, có vô số VTR ứng với GTR λ.
3. Giả sử A là ma trận chéo với các phần tử trên đường chéo lần lượt là $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ (không nhất thiết khác nhau). Khi đó dễ thấy mỗi λ_i là một GTR của A, hơn nữa có thể chọn VTR của A ứng với là $v_i = (0, \ldots, a, \ldots, 0)^t$, ở đây $0 \neq a$ ở vị trí thứ i, i = 1, 2, …, n.
4. Như vậy, đối với mỗi ma trận vuông A, $\det(A - \lambda I)$ liên quan trực tiếp đến các GTR của A. Khi biết λ là GTR của A, việc giải hệ $(A - \lambda I)v = \mathbf{O}$ cho ta các VTR của A ứng với GTR λ. Hơn nữa, việc chéo hóa A cũng liên quan đến các GTR, VTR.

III.2.3. ĐA THỨC ĐẶC TRƯNG VÀ THUẬT TOÁN TÌM GTR, VTR CHÉO HÓA MA TRẬN VUÔNG

1. **Mệnh đề**: Với biến số λ và mỗi ma trận $A = [a_{ij}]_n$ vuông cấp n, định thức $\det(A - \lambda I)$ là một đa thức bậc n của biến λ, ký hiệu $\chi(\lambda)$. Hơn nữa ta có
$$\chi(\lambda) = (-1)^n\lambda^n + (-1)^{n-1}(a_{11} + a_{22} + \ldots + a_{nn})\,\lambda^{n-1} + \ldots + \det A.$$
2. **Đa thức đặc trưng**: $\chi(\lambda)$ được gọi là ***đa thức đặc trưng*** của A.
3. ***Đa thức ma trận***
   a) *Cho đa thức $p(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0$. Khi đó biểu thức nhận được từ p(x) bằng cách thay các lũy thừa của x bởi các lũy thừa của ma trận vuông A nào đó được gọi là đa thứ ma trận:*
$$p(A) = a_nA^n + a_{n-1}A^{n-1} + \ldots + a_1A + a_0I.$$
   Ở đây a_0 trong p(x) được hiểu là a_0x^0 và do đó được thay bởi $a_0A^0 = a_0I$ với I là ma trận đơn vị cùng cấp với A.
   b) ***Định lý Hamilton – Cayley***: *Mỗi ma trân vuông A đều là nghiệm của đa thức đặc trưng $\chi(\lambda)$ của nó, tức là $\chi(A) = \mathbf{O}$ (ma trận không vuông cùng cấp với A).*
4. **Bài toán**: Cho ma trận $A = [a_{ij}]_n$ vuông cấp n (n là số tự nhiên dương). Tìm các GTR, VTR của A (nếu có) và chéo hóa A (nếu được).
5. **Thuật toán tìm GTR, VTR và chéo hóa**
   - **Bước 1**: Lập đa thức đặc trưng $\chi(\lambda)$: = $\det(A - \lambda I)$ của A (nên cố gắng đưa về dạng tích các nhân tử).
   - **Bước 2**: Giải phương trình đặc trưng $\chi(\lambda) = 0$ tìm các nghiệm (nếu có).

+ Nếu phương trình đặc trưng vô nghiệm thì kết luận A không có GTR nào, không có VTR nào và không chéo hóa được $\rightarrow$ Thuật toán dừng.
+ Nếu phương trình đặc trưng có nghiệm thì tập nghiệm chính là tập tất cả các GTR của A $\rightarrow$ Làm tiếp bước 3.

- **Bước 3**: Tìm họ các VTR ứng với từng GTR.
  Chẳng hạn xét GTR λ_i nào đó. Ta giải hệ phương riêng $(A - \lambda_i I)X = \mathbf{O}$. Đây là một hệ PTTT thuần nhất mà chắc chắn có nghiệm không tầm thường vì det $A - \lambda_i I) = \chi(\lambda_i) = 0$. Họ các nghiệm không tầm thường chính là họ các VTR ứng với GTR λ_i đang xét.
- **Bước 4**: Quan sát họ các VTR tương ứng với từng GTR để nhận biết A có chéo hóa được hay không. Khi chéo hóa được, chọn ma trận C làm chéo hóa A từ chính các họ VTR đó (xem trong ví dụ minh họa).

6. Ví dụ minh họa

Ví dụ 3: Cho ma trận $A = \begin{bmatrix} 5 & 4 & 6 \\ 4 & 5 & 6 \\ -4 & -4 & -5 \end{bmatrix}$. Tìm các GTR, VTR của A (nếu có) và chéo hóa A (nếu được).

<u>**Giải**</u>

- Đa thức đặc trưng của A là

$$\chi(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 5-\lambda & 4 & 6 \\ 4 & 5-\lambda & 6 \\ -4 & -4 & -5-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2(3-\lambda).$$

- Giải phương trình đặc trưng ta được $\chi(\lambda) = (1-\lambda)^2(3-\lambda) = 0 \Leftrightarrow \lambda \in \{1, 3\}$. Do đó A có đúng hai GTR là $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 3$.
- Xét GTR $\lambda_1 = 1$. Hệ PT riêng tương ứng như sau

$$(A - \lambda_1 I)X = \mathbf{O} \Leftrightarrow (A - I)X = \mathbf{O} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 4 & 4 & 6 \\ 4 & 4 & 6 \\ -4 & -4 & -6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow 4x_1 + 4x_2 + 6x_3 = 0.$$

  Giải hệ ta được $X = \begin{bmatrix} 3a \\ 3b \\ -2(a+b) \end{bmatrix}$; a, b$\in\mathbf{R}$. Do đó họ VTR ứng với $\lambda_1 = 1$ là $u = \begin{bmatrix} 3a \\ 3b \\ -2(a+b) \end{bmatrix}$; a, b$\in\mathbf{R}$, $a^2 + b^2 \neq 0$.
- Xét GTR $\lambda_2 = 3$. Hệ PT riêng tương ứng như sau

$$(A - \lambda_2 I)X = \mathbf{O} \Leftrightarrow (A - 3I)X = \mathbf{O} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 4 & 2 & 6 \\ -4 & -4 & -8 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0; \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 0; \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 0. \end{cases}$$

  Giải hệ ta được $X = \begin{bmatrix} c \\ c \\ -c \end{bmatrix}$, c$\in\mathbf{R}$. Do đó họ VTR ứng với $\lambda_2 = 3$ là $v = \begin{bmatrix} c \\ c \\ -c \end{bmatrix}$, $c \neq 0$.

- Quan sát họ các VTR (trong không gian $\mathbf{R}^3$) ứng với các GTR ta thấy tổng số tham số cần dùng là 3, đúng bằng số chiều của $\mathbf{R}^3$. Do đó A chéo hóa được. Cụ thể ta chọn ma trận C theo ba cột như dưới đây.

+ Cho a = 1, b = 0 ta được $c_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}$; Cho a = 0, b = 1 ta được $c_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}$;

+ Cho c = 1 ta được $c_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$. Chọn $C = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ -2 & -2 & -1 \end{bmatrix}$. Khi đó C chính là ma trận làm chéo hóa A và dạng chéo của A là $D = C^{-1}AC = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$.

- **Kết luận**

+ A có hai GTR phân biệt: - $\lambda_1 = 1$, họ VTR tương ứng $\begin{bmatrix} 3a \\ 3b \\ -2(a+b) \end{bmatrix}$; a, b$\in\mathbf{R}$, $a^2 + b^2 \neq 0$.

- $\lambda_2 = 3$, họ VTR tương ứng $\begin{bmatrix} c \\ c \\ -c \end{bmatrix}$, $c \neq 0$.

+ A chéo hóa được bởi ma trận $C = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ -2 & -2 & -1 \end{bmatrix}$ và dạng chéo của A là $D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$.

Ví dụ 4: Cho ma trận $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$. Tìm các GTR, VTR của A (nếu có) và chéo hóa A (nếu được).

Giải

- Đa thức đặc trưng của A là

$$\chi(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ -4 & 4-\lambda & 0 \\ -2 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = -(2-\lambda)^3.$$

- Giải phương trình đặc trưng ta được $\chi(\lambda) = -(2-\lambda)^3 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 2$. Do đó A có đúng một GTR duy nhất $\lambda_0 = 2$.
- Xét GTR duy nhất $\lambda_0 = 2$. Hệ PT riêng tương ứng như sau

$$(A - \lambda_0 I)X = \mathbf{O} \Leftrightarrow (A - 2I)X = \mathbf{O} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -4 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow 2x_1 - x_2 = 0.$$

Giải hệ ta được $X = \begin{bmatrix} a \\ 2a \\ b \end{bmatrix}$; a, b$\in$**R**. Họ VTR ứng với $\lambda_0 = 2$ là $u = \begin{bmatrix} a \\ 2a \\ b \end{bmatrix}$; a, b$\in$**R**, $a^2 + b^2 \neq 0$.

- Quan sát họ VTR (trong không gian $\mathbf{R}^3$) ứng với GTR duy nhất $\lambda_0 = 2$ ta thấy tổng số tham số cần dùng là 2, nhỏ hơn số chiều của $\mathbf{R}^3$. Do đó A không chéo hóa được.
- **Kết luận**:

+ A có duy nhất một GTR $\lambda_0 = 2$ với họ VTR tương ứng $\begin{bmatrix} a \\ 2a \\ b \end{bmatrix}$; a, b$\in$**R**, $a^2 + b^2 \neq 0$.

+ A không chéo hóa được.

III.3. SƠ LƯỢC DẠNG TOÀN PHƯƠNG (QUADRATIC FORMS)

III.3.1. KHÁI NIỆM VỀ DẠNG TOÀN PHƯƠNG

1. Định nghĩa: Cho n là số nguyên dương. Một ***dạng toàn phương*** n biến (thực) $q(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ được cho bởi biểu thức dạng sau đây:

$$q(x_1, x_2, \ldots, x_n) = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + \ldots + a_{nn}x_n^2 + 2\sum_{1 \le i < j \le n} a_{ij}x_i x_j \qquad (3.1.1)$$

ở đó $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}, a_{ij}$ $(1 \le i < j \le n)$ là các số (thực) cho trước, còn $x_1, x_2, \ldots, x_n$ là n biến số (thực). Đôi khi, để đơn giản ta chỉ viết $q(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ là q.

2. Ví dụ

Ví dụ 5: $q = 2x^2 - 4xy + 8xz - 3y^2 + 6yz + 5z^2$ là một dạng toàn phương 3 biến.

Ví dụ 6: $f = x^2 + 3y^2 + 2xy - 5xz + 9yz - 2x + 3y - 7z$ không là dạng toàn phương vì chứa các số hạng bậc nhất.

3. Nhận xét: Đặc trưng của dạng toàn phương là "***biểu thức chỉ chứa toàn những số hạng bậc 2, không có mặt những số hạng khác bậc 2***".

4. Biểu diễn dạng toàn phương dưới dạng ma trận

Xét dạng toàn phương n biến $q = q(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ cho ở (3.1.1). Đặt

$$X := \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix};\ A := [a_{ij}]_n = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix};$$

ở đó $a_{ji} := a_{ij}$, $1 \le i < j \le n$. Khi đó q được viết lại ở dạng ma trận như sau:

$$q = q(x_1, x_2, \ldots, x_n) = X^t.A.X \qquad (3.1.4)$$

5. Ví dụ 7

+ Ma trận của q trong ví dụ 5 là $A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 4 \\ -2 & -3 & 3 \\ 4 & 3 & 5 \end{bmatrix}$.

6. Nhận xét

+ A được gọi là ***ma trận của dạng toàn phương*** q. Nó là ma trận đối xứng, tức là $A = A^t$ (các phần tử đối xứng với nhau qua đường chéo chính bằng nhau: $a_{ij} = a_{ji}$; $1 \le i < j \le n$.

+ Khi q được cho ở dạng (3.1.1), A được xác định bởi quy tắc "***chia đôi***" các hệ số của các tích không bình phương x_ix_j; $1 \le i < j \le n$.

7. Hạng của dạng toàn phương – Dạng toàn phương suy biến và không suy biến

+ Xét dạng toàn phương cho bởi (3.1.4). Khi đó, rank(A) cũng được gọi là ***hạng*** của q và viết rank(q):= rank(A).

+ Khi rank(q) = n (số biến) thì ta nói q là dạng toàn phương ***không suy biến***. Trái lại, nếu rank(q) < n (số biến) thì ta nói q ***suy biến***.

8. Ví dụ 8: Trong ví dụ 5, rank(q) = rank(A) = 3 và q không suy biến vì $\det A = -64 \neq 0$.

III.3.2. DẠNG CHÍNH TẮC CỦA DẠNG TOÀN PHƯƠNG

1. **Định nghĩa**: Dạng toàn phương n biến $q = q(x_1, x_2, \ldots, x_n) = X^t.A.X$ được gọi là ***có dạng chính tắc*** nếu ma trận A của q là ma trận chéo, tức là aij = aji = 0; $1 \le i < j \le n$. Nói cách khác, biểu thức của q chưa toàn những bình phương:
$$q(x_1, x_2, \ldots, x_n) = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + \ldots + a_{nn}x_n^2 \qquad (3.2.1)$$
Lúc này, các hệ sô a_{11}, a_{22}, a_{nn} gọi là ***các hệ số chính tắc*** của q.
2. **Định lý (Luật quán tính)**: Đối mỗi dạng toàn phương n biến q, luôn có thể đổi biến để đưa q về dạng chính tắc. Dạng chính tắc của q nói chung là không duy nhất mà phụ thuộc vào cách đổi biến. Tuy nhiên trong mỗi dạng chính tắc của q, số hệ số khác không là hằng và chính là hạng của q; số các hệ số dương và âm cũng là các hằng số chỉ phụ thuộc q chứ không phụ thuộc vào cách đổi biến để đưa q về dạng chính tắc.
3. **Chỉ số của dạng toàn phương**: Cho dạng toàn phương n biến $q = q(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Khi đó số các hệ số dương trong mỗi dạng chính tắc của q được gọi là ***chỉ số dương (quán tính)*** của q và ký hiệu bởi s(q). Còn số các hệ số âm trong mỗi dạng chính tắc của q được gọi là ***chỉ số âm (quán tính)*** và ký hiệu bởi t(q). Rõ ràng s(q) + t(q) = rank(q).
4. **Ví dụ 9**: Giả sử dạng toàn phương 4 biến q có dạng chính tắc: $q = 2x_1^2 - 5x_2^2 + 3x_4^2$ (vắng mặt x_3^2 hay hệ số của x_3^2 bằng 0). Khi đó ta có rank(q) = 3, s(q) = 2, t(q) = 1.
5. **Thuật toán Lagrange đưa dạng toàn phương về dạng chính tắc**

   a) Bài toán: Cho dạng toàn phương n biến q như ở (3.1.1). Hãy đưa q về dạng chính tắc và chỉ rõ phép đổi biến để q có dạng chính tắc đó.

   b) Thuật toán Lagrange

   Ý tưởng cơ bản của thuật toán là dùng dạng của hằng đẳng thức $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$ để biến đổi trực tiếp biểu thức của q bằng cách thêm bớt thích hợp nhằm làm xuất hiện bình phương dần dần đối với từng biến một (xem ví dụ minh họa)

   Ví dụ 10: Hãy đưa dạng toàn phương 3 biến sau đây và dạng chính tắc và chỉ rõ phép đổi biến: $q = q(x, y, z) = 2x^2 - 8xy + 12xz + 11y^2 - 12yz + 5z^2$. Tính hạng và các chỉ số của q.

   <u>Giải</u> Biến đổi biểu thức của q ta được

   $q = 2[x^2 - 2x(2y - 3z) + (2y - 3z)^2] - 2(2y - 3z)^2 + 11y^2 - 12yz + 5z^2$
   $= 2(x - 2y + 3z)^2 + 3y^2 + 12yz - 13z^2$
   $= 2(x - 2y + 3z)^2 + 3[y^2 + 2y(2z) + (2z)^2] - 12z^2 - 13z^2$
   $= 2(x - 2y + 3z)^2 + 3(y + 2z)^2 - 25z^2$.

Đặt X = x – 2y + 3z; Y = y + 2z; Z = z và thay vào biểu thức cuqr q ta được dạng chính tắc của q như sau: $q = 2X^2 + 3Y^2 - 25Z^2$. Do đó rank(q) = 3 và q không suy biến; s(q) = 2, t(q) = 1.

III.3.3. DẠNG TOÀN PHƯƠNG CÓ DẤU XÁC ĐỊNH

1. **Định nghĩa**: Xét dạng toàn phương n biến bất kỳ $q = q(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

   + Ta bảo q ***không âm*** hay ***nửa xác định dương*** nếu

   $$q(x_1, x_2, \dots, x_n) \geq 0;\ \forall\ x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbf{R}.$$

   + Ta bảo q ***xác định dương*** nếu q không âm và $q(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \Leftrightarrow x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$.

   + Ta bảo q ***không dương*** hay ***bán xác định âm*** nếu

   $$q(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq 0;\ \forall\ x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbf{R}.$$

   + Ta bảo q ***xác định âm*** nếu q không dương và $q(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \Leftrightarrow x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$.

   + Ta bảo q ***có dấu xác định*** hay ***xác định dấu*** nếu hoặc là q không âm hoặc là q không dương.

   + Ta bảo q ***đổi dấu*** nếu q không có dấu xác định, tức là tìm được các vectơ $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ và $b = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ trong $\mathbf{R}^n$ sao cho $q(a_1, a_2, \dots, a_n) < 0 < q(b_1, b_2, \dots, b_n)$.

2. **Cách nhận biết tính xác định dấu của dạng toàn phương**

   Để nhận biết tính xác định dấu hay đổi dấu của dạng toàn phương q ta thực hiện các bước dưới đây.

   - **Bước 1: Biến đổi đưa q về dạng chính tắc:**

     $$q = a_1x_1^2 + a_2x_2^2 + \dots + a_sx_s^2 - a_{s+1}x_{s+1}^2 - a_{s+2}x_{s+2}^2 - \dots - a_{s+t}x_{s+t}^2$$

     với $a_i > 0$, i = 1, 2, …, s + t; s = s(q), t = t(q), s + t = rank(q) ≤ n (số biến của q).

   - **Bước 2: Từ dạng chính tắc này ta đi đến kết luận. Cụ thể là**

     + Nếu mọi hệ số chính tắc đều dương, tức là s(q) = rank(q) thì q <u>không âm</u>.

     + Nếu r = n và mọi hệ số chính tắc đều dương, tức là s(q) = rank(q) = n (số biến) thì q <u>xác định dương</u>.

     + Nếu mọi hệ số chính tắc đều âm, tức là t(q) = rank(q) thì q <u>không dương</u>.

     + Nếu r = n và mọi hệ số chính tắc đều âm, tức là t(q) = rank(q) = n (số biến) thì q <u>xác định âm</u>.

     + Nếu có cả hệ số chính tắc dương lẫn âm thì q <u>đổi dấu</u>.

3. **Ví dụ**

   Ví dụ 11: q trong ví dụ 10 đổi dấu.

   Ví dụ 12: Cho dạng toàn phương ba biến phụ thuộc tham số (thực) m:

   $$q = q(x, y, z) = mx^2 - 4mxy + 2mxz + (5m + 1)y^2 - 2(3m + 1)yz + 3(m + 1)z^2.$$

   Hãy đưa q về dạng chính tắc rồi biện luận về dấu của q theo m.

   <u>**Giải**</u> Trước hết ta biến đổi q như sau:

   $$\begin{aligned} q &= m[x^2 - 2x(2y - z) + (2y - z)^2] - m(2y - z)^2 + (5m + 1)y^2 - 2(3m + 1)yz + 3(m + 1)z^2 \\ &= m(x - 2y + z)^2 + (m + 1)y^2 - 2(m + 1)yz + (2m + 3)z^2 \\ &= m(x - 2y + z)^2 + (m + 1)[y^2 - 2yz + z^2] - (m + 1)z^2 + (2m + 3)z^2 \\ &= m(x - 2y + z)^2 + (m + 1)(y - z)^2 + (m + 2)z^2. \end{aligned}$$

   Đặt biến mới X = x – 2y + z; Y = y – z; Z = z ta được dạng chính tắc của q như sau:

   $$q = mX^2 + (m + 1)Y^2 + (m + 2)Z^2.$$

Từ đây ta có:

+ (q không âm) ⇔ (cả m, m + 1, m + 2 đều không âm) ⇔ m ≥ 0.
+ (q xác định dương) ⇔ (cả m, m + 1, m + 2 đều dương) ⇔ m > 0.
+ (q không dương) ⇔ (cả m, m + 1, m + 2 đều không dương) ⇔ m ≤ – 2.
+ (q xác định âm) ⇔ (cả m, m + 1, m + 2 đều âm) ⇔ m < – 2.
+ (q đổi dấu) ⇔ (trong m, m + 1, m + 2 có ít nhất một cặp trái dấu) ⇔ – 2 < m < 0.

BÀI TẬP CUỐI CHƯƠNG III

III.1. Tìm GTR, VTR (nếu có) và chéo hóa (nếu được) các ma trận dưới đây.

a) $\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$; b) $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$; c) $\begin{bmatrix} 3 & 8 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$; d) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$.

e) $\begin{bmatrix} 2 & 2 & -5 \\ 3 & 7 & -15 \\ 1 & 2 & -4 \end{bmatrix}$; g) $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \end{bmatrix}$; h) $\begin{bmatrix} 1 & 8 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$; i) $\begin{bmatrix} 2 & 9 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$.

III.2. Đưa các dạng toàn phương sau đây về dạng chính tắc, tính hạng và xác định dấu của nó.

a) $q = x^2 + 2xy + 2xz + 3y^2 - 2yz + 6z^2$.
b) $q = x^2 - 2xy + 4xz - 6yz + 3z^2$.
c) $q = 2x^2 + 5y^2 + 5z^2 + 4xy - 4xz - 8yz$.
d) $q = 2xy + 4xz - 6yz$.

III.3. Biện luận theo tham số thực m về chỉ số âm dương và dấu của dạng toàn phương dưới đây.

a) $q = -x^2 - 2xy + 4xz - 2y^2 + (m - 9)z^2$.
b) $q = x^2 - 2xy + 4xz - 6yz + (m + 3)z^2$.
c) $q = x^2 - 2xy + 4xz + 2y^2 - 6yz + (m + 2)z^2$.
d) $q = mx^2 - 2mxy + 4mxz + (m +1)y^2 + 2(1 - 2m)yz + (m^2 + 4m + 1)z^2$.